FUNKCIJE I GRANIČNE VRIJEDNOSTI

OSNOVNA SVOJSTVA FUNKCIJA

Definicija 1. Neka su X , Y i Z neprazni podskupovi skupa realnih brojeva.

- **Preslikavanje** (ili **funkcija**) f skupa X u skup Y je pravilo po kome se svakom $x \in X$ pridružuje tačno jedno $y \in Y$, što zapisujemo na sljedeći način $f : X \to Y \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in X)(\exists! y \in Y) y = f(x)$. Skup X je **domen** (ili oblast definisanosti) funkcije f . Skup $f(X)$ je **kodomen** (oblast vrijednosti) funkcije f .
- Skup tačaka $G = \{(x, y) | \; x \in X \wedge y = f(x) \in Y\}$ je **grafik funkcije** $f : X \to Y$.
- Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **injekcija** (ili "1-1" preslikavanje) ako važi $(\forall a, b \in X) \; f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
- Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **sirjekcija** (ili "na" preslikavanje) ako važi $f(X) = Y$.
- Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **bijekcija** ako je injekcija i sirjekcija.
- Ako je $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, tada je preslikavanje $g \circ f : X \to Z$ definisano sa $(\forall x \in X)(g \circ f)(x) = g(f(x))$ **kompozicija preslikavanja** f i g (ili složeno preslikavanje prelikavanja f i g).
- Preslikavanje $f : X \to X$ definisano sa $f(x) = x$ za svako $x \in X$ naziva se **identičkim preslikavanjem** skupa X .
- Ako je $f : X \to Y$ bijekcija tada preslikavanje $f^{-1} : Y \to X$, takvo da su preslikavanja $f \circ f^{-1}$ i $f^{-1} \circ f$ identička preslikavanja, nazivamo **inverznim preslikavanjem** preslikavanja f .
- Funkcija $f : X \to Y$ je **ograničena odozgo** na skupu $E \subseteq X$ ako $(\exists m \in R)(\forall x \in E) \, f(x) \le m$.
- Funkcija $f : X \to Y$ je **ograničena odozdo** na skupu $E \subseteq X$ ako $(\exists k \in R)(\forall x \in E) \, f(x) \ge k$.
- Funkcija $f : X \to Y$ je **ograničena** na skupu $E \subseteq X$ ako je ograničena odozgo i odozdo tj. ako $(\exists c > 0)(\forall x \in E) |f(x)| \le c$.
- Funkcija $f : X \to Y$ je **monotono rastuća** na skupu $E \subseteq X$ ako $(\forall x, y \in E) \; x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$.
- Funkcija $f : X \to Y$ je **monotono opadajuća** na skupu $E \subseteq X$ ako $(\forall x, y \in E) \; x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$.
- Funkcija $f : X \to Y$ je **parna funkcija** ako $(\forall x \in X) \, f(-x) = f(x)$. Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na y osu.
- Funkcija $f : X \to Y$ je **neparna funkcija** ako $(\forall x \in X) \, f(-x) = -f(x)$. Grafik neparne funkcije je simetričan u odnosu na koordinatni početak.
- Funkcija $f : X \to Y$ je **periodična funkcija** ako $(\exists \, p > 0)(\forall x \in X) \, f(x + p) = f(x)$. Broj p je **period funkcije** f .
- Realan broj a je **nula funkcije** $f : X \to Y$ ako je $f(a) = 0$.

Primjer 1. Naći oblast definisanosti funkcija:

a) $y=\dfrac{2-x}{x^2-9}$, **b)** $y=\sqrt{x^2-7x+6}$, **c)** $y=\ln(x-4)$,

d) $y=e^{\sqrt{1-x}}\log_3(4+x)$, **e)** $y=3x+4$.

a) Oblast definisanosti funkcije $y=\dfrac{2-x}{x^2-9}$ je: $D: x^2-9\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 3$, tj. $D: x\in(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$,

b) Domen funkcije $y=\sqrt{x^2-7x+6}$ je: $D: x^2-7x+6\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6)\geq 0$, tj. $D: x\in(-\infty,1]\cup[6,+\infty)$,

c) Domen funkcije $y=\ln(x-4)$ je: $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$, tj. $D: x\in(4,+\infty)$,

d) Domen funkcije $y=e^{\sqrt{1-x}}\log_3(4+x)$ je: $1-x\geq 0 \wedge 4+x>0 \Leftrightarrow x\leq 1\wedge x>-4$, tj. $D: x\in(-4,1]$,

e) Domen funkcije $y=3x+4$ je cijeli skup realnih brojeva.

Primjer 2. Naći funkcije $f\circ g$ i $g\circ f$ ako je $f(x)=x^3+1$, $g(x)=2x+1$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=(2x+1)^3+1=8x^3+12x^2+6x+2$,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^3+1)=2(x^3+1)+1=2x^3+3$.

Primjer 3. Ako je $f(x-1)=2x-3$, odrediti $f(f(x^2-x+1))$.

Neka je $x-1=t\Rightarrow x=t+1$, tada je

$f(x-1)=2x-3 \Leftrightarrow f(t)=2(t+1)-3=2t-1$. Dakle, dobili smo da je $f(x)=2x-1$.

$$f(f(x^2-x+1))=f(2(x^2-x+1)-1)=f(2x^2-2x+1)= \\ =2(2x^2-2x+1)-1=4x^2-4x+1.$$

Primjer 4. Naći nule sljedećih funkcija: **a)** $y=\dfrac{x-2}{x^3+8}$, **b)** $y=\log(x-1)$.

a) $y=0\Rightarrow \dfrac{x-2}{x^3+8}=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$. Dakle, nula funkcije je tačka $N(2,0)$.

b) $y=0\Rightarrow \log(x-1)=0\Rightarrow x-1=1\Rightarrow x=2$. Dakle, nula funkcije je tačka $N(2,0)$.

Primjer 5. Ispitati parnost sljedećih funkcija:

a) $y=x^2-1-3\cos x$, **b)** $y=x^2+1+\sin x^2$, **c)** $y=x^3+2+\sin x$, **d)** $y=x^3$.

a) $f(-x)=(-x)^2-1-3\cos(-x)=x^2-1-3\cos x=f(x)$ .Dakle, funkcija je parna.

b) $f(-x)=(-x)^2+1+\sin(-x)^2=x^2+1+\sin x^2=f(x)$. Dakle, funkcija je parna.

c) $f(-x)=(-x)^3+2+\sin(-x)=-x^3+2-\sin x\neq\begin{cases} f(x) \\ -f(x)\end{cases}$. Dakle, funkcija nije ni parna ni neparna.

d) $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. Dakle, funkcija je neparna.

Primjer 6. Data je funkcija $f(x)=\log_2(x-1)$. Odrediti f^{-1}.

$f(x)=\log_2(x-1) \Leftrightarrow y=\log_2(x-1) \Leftrightarrow x-1=2^y \Leftrightarrow x=2^y+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad f^{-1}(x)=2^x+1$

NIZOVI, GRANIČNA VRIJEDNOST NIZA I OSOBINE KONVERGENTNIH NIZOVA

Definicija 1. Brojni niz je funkcija iz skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva. Koristimo oznaku $f: N \to R, \quad f(n)=a_n$ ili kratko pišemo samo (a_n). Brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ su **članovi** brojnog niza (a_n), a broj a_n je **opšti član** brojnog niza (a_n).

Primjer 1.

a) Niz (a_n) čiji je opšti član $a_n=\frac{1}{n}$ ima članove: $a_1=1, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{3}, a_4=\frac{1}{4}, \ldots$

b) Niz (a_n) čiji je opšti član $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$ ima članove: $a_1=-\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{3}, a_3=-\frac{1}{4}, \ldots$

c) Niz (a_n) čiji je opšti član $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n^2}$ ima članove: $a_1=0, a_2=\frac{1}{2}, a_3=0, a_4=\frac{1}{8}, ..$

d) Niz (a_n) čiji su članovi: $a_1=1, a_2=\frac{1}{3}, a_3=\frac{1}{5}, a_4=\frac{1}{7}, \ldots$ ima opšti član $a_n=\frac{1}{2n-1}$

e) Niz (a_n) čiji su članovi: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ ima opšti član $a_n=\frac{1}{n^2}$.

f) Niz (a_n) čiji su članovi: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ima opšti član $a_n=1+\frac{1}{n}$.

Definicija 2. Brojni niz (a_n) kod koga je razlika svaka dva uzastopna člana konstantna tj. $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ldots=a_n-a_{n-1}=\ldots=d$ naziva se **aritmetičkim nizom**.
Iz prethodne definicije zaključujemo da za opšti član aritmetičkog niza (a_n) važi jednakost $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, a suma od n članova aritmetičkog niza izračunava se po formuli $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.

Primjer 2. Izračunati $1+2+3+4+\ldots+n=$
Primijetimo da se radi o sumi od n članova aritmetičkog niza za koji važi $a_1=1, a_n=n, d=1$, pa je $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n}{2}(1+n)$.

Definicija 3. Brojni niz (a_n) kod koga je količnik svaka dva uzastopna člana konstantan tj. $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\ldots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\ldots=q$ naziva se **geometrijskim nizom**.

Iz prethodne definicije zaključujemo da za opšti član geometrijskog niza (a_n) važi jednakost $a_n=a_1q^{n-1}$, a suma od n članova geometrijskog niza izračunava se po formuli $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

Primjer 3. Izračunati $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$

Primijetimo da se radi o sumi od n članova geometrijskog niza za koji važi $a_1=1, q=\frac{1}{2}, a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$, pa je

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\frac{1}{2^n})=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}.$$

Definicija 4.

- Niz realnih brojeva (a_n) je **ograničen odozgo** ako $(\exists m\in R)(\forall n\in N)\ a_n\le m$.
- Niz realnih brojeva (a_n) je **ograničen odozdo** ako $(\exists k\in R)(\forall n\in N)\ a_n\ge k$.

- Niz realnih brojeva (a_n) je **ograničen** ako je ograničen odozgo i odozdo tj. ako $(\exists\, c>0)(\forall n\in N)\ |a_n|\le c$.
- Niz realnih brojeva (a_n) je **rastući** ako $(\forall n\in N)\quad a_{n+1}>a_n$. Koristimo oznaku $(a_n)\uparrow$.
- Niz realnih brojeva (a_n) je **opadajući** ako $(\forall n\in N)\ a_{n+1}<a_n$. Koristimo oznaku $(a_n)\downarrow$

Definicija 5. Realan broj a je **granična vrijednost** brojnog niza (a_n) ako važi $(\forall\varepsilon>0)(\exists m=m(\varepsilon)\in N)(\forall n\ge m)\ |a_n-a|<\varepsilon$. Koristimo oznaku $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Brojni niz koji ima graničnu vrijednost naziva se **konvergentrni niz**. Za niz koji nema graničnu vrijednost kažemo da **divergira**. Za niz čija je granična vrijednost nula kažemo da je **beskonačno mali niz**.

Definicija 6.
- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty\quad\Leftrightarrow(\forall M>0)(\exists n_0=n_0(M)\in N)(\forall n\ge n_0)\quad a_n>M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty\quad\Leftrightarrow(\forall M>0)(\exists n_0=n_0(M)\in N)(\forall n\ge n_0)\quad a_n<-M$.

Definicija 7. Neka je (n_k) rastući niz prirodnih brojeva. Niz (y_k) definisan jednakošću $y_k=x_{n_k}, k\in N$ nazivamo **podnizom** niza (x_k) i obilježavamo ga sa (x_{n_k}).

Primjer 4. Koristeći definiciju granične vrijednosti niza dokazati da je: **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}c=c,\quad\forall c\in R$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

a) Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno, tada $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$, pa se u definiciji 5 može uzeti da je $m=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, (gdje je $[x]$ cio dio od x). Dakle,

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists m=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\in N)(\forall n\ge m)\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

b) Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno, tada $|c-c|=0<\varepsilon,\forall n\in N\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

c) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno tada $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$, pa se u definiciji 5 može uzeti $m = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Dakle,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in N)(\forall n \ge m)\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Teorema 1. Svaki konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrijednost.

Teorema 2. Svaki konvergentan niz je ograničen.

Teorema 3. Neka su $(x_n), (y_n)$ konvergentni nizovi i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Tada:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a + b$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a - b$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, \ \ y_n \ne 0 \ \forall n \in N, b \ne 0$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot x_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = k \cdot a, \quad k \in R$.

Primjer 5. Koristeći prethodnu teoremu izračunati sljedeće granične vrijednosti:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-3}{2n+1} + \frac{4-3n^2}{2n^2+11})$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2^n} - \frac{3n-1}{n^2+2n+15})$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4+3n)\cdot(-n+12)}{(2-n)\cdot(13+4n)}$.

$$\boldsymbol{a}) \lim_{n\to\infty} (\frac{n-3}{2n+1} + \frac{4-3n^2}{2n^2+11}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{2n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{4-3n^2}{2n^2+11} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-\frac{3}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\frac{4}{n^2}-3)}{n^2(2+\frac{11}{n^2})} == \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})} + \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4}{n^2}-3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{11}{n^2})} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1,$$

$$\boldsymbol{b}) \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2^n} - \frac{3n-1}{n^2+2n+15}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{n(3-\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{15}{n^2})} =$$

$$= 0 - \lim_{n\to\infty} \frac{(3-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{2}{n}+\frac{15}{n^2})} = 0 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{15}{n^2})} = 0 - 0 \cdot \frac{3}{1} = 0,$$

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4+3n)\cdot(-n+12)}{(2-n)\cdot(13+4n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(\frac{4}{n}+3)\cdot(-1+\frac{12}{n})}{n^2(\frac{2}{n}-1)(\frac{13}{n}+4)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{4}{n}+3)\cdot(-1+\frac{12}{n})}{(\frac{2}{n}-1)(\frac{13}{n}+4)}=$.

$=\dfrac{3\cdot(-1)}{(-1)\cdot 4}=\dfrac{3}{4}$

Teorema 4. Neka za brojne nizove $(a_n),(b_n)$ i (c_n) važi $a_n\le c_n\le b_n,\ \forall n\in N$ i $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$. Tada niz (c_n) konvergira i važi $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

Primjer 6. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,\quad |q|<1$.

Za $|q|<1 \;\Rightarrow\; |q|=\dfrac{1}{1+p},\quad p>0$, a kako je $(1+p)^n=1+np+\binom{n}{2}p^2+\ldots+p^n>np$, pa je $0\le|q|^n=\dfrac{1}{(1+p)^n}<\dfrac{1}{np}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{p}$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{p}=0\wedge\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, po prethodnoj teoremi slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$. Sada iz nejednakosti $-|q|^n\le q^n\le|q|^n$, opet po prethodnoj teoremi slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

Teorema 5. Proizvod beskonačno malog niza i ograničenog niza je beskonačno mali niz.

Primjer 7. Iz prethodne teoreme zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$ jer je $(\dfrac{1}{n})$ beskonačno mali niz, a $(\sin n)$ je ograničen niz.

Teorema 6.

- Neka je $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\quad\wedge\quad x_n\ge 0,\ \forall n\in N$. Tada je $a\ge 0$.
- Neka je $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\quad \lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ i $x_n\le y_n\quad \forall n\in N$. Tada je $a\le b$.

Teorema 7.

- Rastući niz koji je ograničen odozgo je konvergentan niz.
- Opadajući niz koji je ograničen odozdo je konvergentan niz.

Primjer 8. Ispitati konvergenciju niza (x_n) za koji važi : $x_1>\sqrt{a}, a>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n}), n\in N$.

Primijetimo da je

$x_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})-\sqrt{a}=\dfrac{x_n^2+a-2x_n\sqrt{a}}{2x_n}=\dfrac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n}\ge 0\Rightarrow\ x_{n+1}\ge\sqrt{a},\ \forall n\in N$.

Iz nejednakosti $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})-x_n=\dfrac{a-x_n^2}{2x_n}\le 0\Rightarrow x_{n+1}\le x_n$ zaključujemo da je niz (x_n) opadajući. Kako je (x_n) opadajući niz i ograničen odozdo, po prethodnoj teoremi slijedi da je konvergentan. Dakle, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = b$. Prelaskom na graničnu vrijednost iz jednakosti $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ dobijamo $b = \frac{1}{2}(b + \frac{a}{b}) \Rightarrow b = \sqrt{a}$. Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Primjer 9. Niz $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ je ograničen i rastući pa je konvergentan.

Dokazuje se da je $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, gdje je $e \approx 2{,}71.....$

Primjer 10. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n-1})^n$.

Pozivajući se na prethodni primjer dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n-1})^n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{n+1}{n-1} - 1)^n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{2}{n-1})^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} ((1 + \frac{2}{n-1})^{\frac{n-1}{2}})^{\frac{2n}{n-1}} = e^2$$

Definicija 8. Niz (x_n) nazivamo **Košijevim** ili **fundamentalnim** nizom ako $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)(\forall m, n \ge n_0)\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$.

Teorema 8. Niz (x_n) je konvergentan ako i samo ako je Košijev niz.

Primjer 11. Ispitati konvergenciju niza $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $n \in N$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, tada za $m, n \in N$, $m > n$ važi $\left|x_m - x_n\right| =$

$$= \left|1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} - (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2})\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} \le$$

$$\le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(m-1)m} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon (\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon})$$

Možemo uzeti da je $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in N$.

Dakle, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in N)(\forall m, n \ge n_0)\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$ tz. niz (x_n) je Košijev, pa pozivajući se na prethodnu teoremu zaključujemo da je niz (x_n) konvergentan

GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE

Definicija 1.

- **Okolina tačke** x_0 je svaki interval $O(x_0)$ realnih brojeva koji sadrži tačku x_0.
- Skup $\{x \in A \mid 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}$ se naziva **probodenom okolinom tačke** x_0.

- Tačka x_0 je **tačka nagomilavanja** skupa $A \subseteq R$ ako svaka okolina tačke x_0 sadrži beskonačno mnogo tačaka skupa A tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sadrži beskonačno mnogo tačaka skupa A.

Lako se dokazuje da je x_0 tačka nagomilavanja skupa A ako i samo ako postoji niz (x_n) tačaka skupa A, različitih od x_0, koji konvergira ka x_0.

Definicija 2. (Košijeva) Neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq R$ i $f : A \to R$ funkcija definisana na A. Realan broj l je **granična vrijednost funkcije** f kada $x \to x_0$ (ili u tački x_0), ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da važi: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Tada pišemo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Definicija 3. (Hajneova) Neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq R$ i $f : A \to R$ funkcija definisana na A. Realan broj l je **granična vrijednost funkcije** f kada $x \to x_0$ (ili u tački x_0), ako za svaki niz (x_n) tačaka skupa A različitih od x_0, koji konvergira ka x_0, niz $(f(x_n))$ konvergira ka l. Tada pišemo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Pokazuje se da su Košijeva i Hajneova definicija erkvivalentne.

Primjer 1. Koristeći Košijevu definiciju dokažimo da je $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i $|x - 2| < \delta$, tada je $|x^2 - 4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| < \delta^2 + 4\delta < \varepsilon$. Dakle,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0, \delta = \frac{-2 + \sqrt{4 + \varepsilon}}{2})(\forall x : 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon, \text{ tz. } \lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Primjer 2. Koristeći Hajneovu definiciju dokažimo da je $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Neka je (x_n) proizvoljan niz realnih brojeva takav da je $\lim_{n \to \infty} x_n = 2$. Tada je $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} (x_n)^2 = \lim_{n \to \infty} x_n \cdot \lim_{n \to \infty} x_n = 2 \cdot 2 = 4$. Dakle, $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Definicija 4. Neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq R$ i $f : A \to R$ funkcija definisana na A.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in R^+)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M \in R^+)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in R^+)(\forall x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in R^+)(\forall x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Primjer 3. Dokažimo da je $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Neka je $M > 0$ proizvoljno i x takvo da je $|x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = M (\Leftrightarrow \delta = \sqrt{\frac{1}{M}})$. Dakle,

$(\forall M \in R^+)(\exists \delta = \sqrt{\frac{1}{M}})(\forall x : 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M)$ tj. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Primjer 4. Dokazati da ne postoji granična vrijednost $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Posmatrajmo nizove $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ i $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Tada $x_n \to 0 \wedge y_n \to 0$, kada $n \to \infty$, a $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, pa je $f(x_n) = \sin 2n\pi = 0 \to 0, n \to \infty$, $f(y_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \to 1, n \to \infty$.

Pozivajući se na Hajneovu definiciju zaključujemo da ne postoji $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Definicija 5. Neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq R$ i $f : A \to R$ funkcija definisana na A.

- Realan broj l je **desna granična vrijednost funkcije** f, kada $x \to x_0$ ako za $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Pišemo $\lim_{x\to x_0+} f(x) = l$.
- Realan broj l je **lijeva granična vrijednost funkcije** f, kada $x \to x_0$ ako za $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Pišemo $\lim_{x\to x_0-} f(x) = l$.

Teorema 1. Neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq R$ i $f : A \to R$ funkcija definisana na A. Funkcija f ima graničnu vrijednost kada $x \to x_0$ ako i samo ako postoje lijeva i desna granična vrijednost funkcije f kada $x \to x_0$ i ako su te vrijednosti jednake.

Primjer 5. Neka je $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 2 \\ -2x+5, & x \le 2 \end{cases}$. Dokazati da ne postoji $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Primijetimo da je $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (-2x+5) = 1$, a $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x+1) = 3$. Kako su lijeva i desna granična vrijednost posmatrane funkcije u tački $x = 2$ različite, to pozivajući se na prethodnu teoremu zaključujemo da ne postoji $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Teprema 2.

- Ako je $\alpha \le f(x) \le \beta$ za $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ i ako postoji granična vrijednost $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, tada je $\alpha \le l \le \beta$.
- Ako je $f(x) \le g(x)$ za $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ i ako postoje granične vrijednosti $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, tada je $l_1 \le l_2$.
- Ako je $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$ i ako je $f(x) \le h(x) \le g(x)$ za $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$, tada je $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$.

- Ako je $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ i $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, $l_1, l_2 \in R$ tada je $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$, $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$, $l_2 \neq 0$.
- Ako je $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ i $\lim_{y\to l} F(y) = L$ i ako je $f(x) \neq l$ za $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$, tada je $\lim_{x\to x_0} F(f(x)) = \lim_{y\to l} F(y) = L$.

Pokazuje se da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$.

Primjer 6. Izračunati sljedeće granične vrijednosti:

$\boldsymbol{a})\lim_{x\to 1}(3x^2 - 4x + 7)$, $\boldsymbol{b})\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{4+3x}$, $\boldsymbol{c})\lim_{x\to 2}\sqrt{x+7}$, $\boldsymbol{d})\lim_{x\to 2}(-1+x)^3$,

$\boldsymbol{e})\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}$

$\boldsymbol{a})\lim_{x\to 1}(3x^2 - 4x + 7) = 3\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 7 = 6$, $\boldsymbol{b})\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{4+3x} = \frac{2\cdot 1+1}{4+3\cdot 1} = \frac{3}{7}$,

$\boldsymbol{c})\lim_{x\to 2}\sqrt{x+7} = \sqrt{9} = 3$, $\boldsymbol{d})\lim_{x\to 2}(-1+x)^3 = (-1+2)^3 = 1$,

$\boldsymbol{e})\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x-4) = -3.$

Primjer 7. Izračunati sljedeće granične vrijednosti:

$\boldsymbol{a})\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$, $\boldsymbol{b})\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2x-1}-1}$, $\boldsymbol{c})\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-2}{-x^2+2x+5}$,

$\boldsymbol{d})\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-10x})$

$$\boldsymbol{a})\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2) = \sqrt{3+1}+2 = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4,$$

$$\boldsymbol{b})\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2x-1}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2x-1}-1}\cdot\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{2x-1}+1)\cdot(3x+1-4)}{(2x-1-1)\cdot(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2})}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{2x-1}+1)\cdot3\cdot(x-1)}{2(x-1)\cdot(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2})}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3\cdot(\sqrt{2x-1}+1)}{2\cdot(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2})}=\frac{3\cdot2}{2\cdot3\cdot\sqrt[3]{16}}=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}},$$

$$\boldsymbol{c})\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-2}{-x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2(-1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}{-1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=$$

$$=\frac{1+0-0}{-1+0+0}=-1,$$

$$\boldsymbol{d})\ \lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-10x})=\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-10x})\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-10x}}{x+\sqrt{x^2-10x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+10x}{x+\sqrt{x^2-10x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x(1+\sqrt{1-\frac{10}{x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{1+\sqrt{1-\frac{10}{x}}}=\frac{10}{2}=5.$$

Primjer 8. Izračunati sljedeće granične vrijednosti:

$\boldsymbol{a})\ \lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}$, $\quad\boldsymbol{b})\ \lim_{x\to0}\frac{tg3x}{x}$, $\quad\boldsymbol{c})\ \lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin7x}$, $\quad\boldsymbol{d})\ \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 5x}$,

$\boldsymbol{e})\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\boldsymbol{a})\ \lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\cdot4=\frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot1=\frac{4}{3},$$

$$\boldsymbol{b})\ \lim_{x\to0}\frac{tg3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{\cos3x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x\cdot\cos3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot3\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos3x}=1\cdot3\cdot1=3,$$

$$\boldsymbol{c})\ \lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin7x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin2x}{2x}\cdot2}{\frac{\sin7x}{7x}\cdot7}=\frac{2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}}{7\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin7x}{7x}}=\frac{2}{7},$$

$$\boldsymbol{d})\ \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 5x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{3x}\cdot3}{\frac{\sin5x}{5x}\cdot5}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{3x}\cdot3}{\frac{\sin5x}{5x}\cdot5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25},$$

$$\boldsymbol{e})\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot4}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$$

Primjer 9. Izračunati sledeće granične vrijednosti:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x,\quad b)\ \lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{5}{x}},\quad c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^x,\quad d)\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x},$$

$$e)\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x},\quad f)\ \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}.$$

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2,$$

$$b)\ \lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{10}=e^{10},$$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}-1\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2x+2}{x^2-x-1}\right)^{\frac{x^2-x-1}{2x+2}}\right)^{\frac{x(2x+2)}{x^2-x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2(2+\frac{2}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}}=e^2,$$

$$d)\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

$$e)\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\begin{pmatrix}e^x-1=t & x\to0\\ x=\ln(1+t) & t\to0\end{pmatrix}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln e}=1,$$

$$f)\ \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\begin{pmatrix}a^x-1=t & x\to0\\ x=\log_a(1+t) & t\to0\end{pmatrix}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\log_a(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

NEPREKIDNE FUNKCIJE

Definicija 1. Funkcija $f:A\to R$ je **neprekidna u tački** $x_0\in A$ ako je $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Koristimo oznaku: $f\in C(x_0)$.

Pozivajući se na Košijevu definiciju granične vrijednosti funkcije f u tački x_0 dobijamo da je:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Pozivajući se na Hajneovu definiciju granične vrijednosti funkcije f u tački x_0 dobijamo da je: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow$ za svaki niz (x_n) tačaka skupa A različitih od x_0, koji konvergira ka x_0, odgovarajući niz $(f(x_n))$ konvergira ka $f(x_0)$.

Definicija 2. Funkcija $f : A \to R$ je **neprekidna na skupu** $B \subseteq A$ ako je neprekidna u svakoj tački skupa B. Koristimo oznaku: $f \in C(B)$

Primjer 1. Dokazati da je funkcija $f(x) = x$ neprekidna na skupu R.
Neka je $x_0 \in R$ proizvoljno i $\varepsilon > 0$ i $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ .Dakle, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon)(\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$ tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ tj. $f \in C(x_0)$.
Kako je $f \in C(x_0)$ i $x_0 \in R$ proizvoljno to je $f \in C(R)$.

Elementarne funkcije su: konstantna funkcija $y = c, c \in R$, stepena funkcija $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$, eksponencijalna funkcija $y = a^x, a > 0 \wedge a \neq 1$, logaritamska funkcija $y = \log_a x, a > 0 \wedge a \neq 1$, trigonometrijske funkcije $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$, inverzne trigonometrijske funkcije $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$.
Koristeći definiciju 1 pokazuje se da su sve elementarne funkcije neprekidne u čitavoj svojoj oblasti definisanosti.

Definicija 3.

- Funkcija $f : A \to R$ je **neprekidna u tački** $x_0 \in A$ **sa desne strane** ako je $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ tj.
  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Funkcija $f : A \to R$ je **neprekidna u tački** $x_0 \in A$ **sa lijeve strane** ako je $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$ tj.
  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Teorema 1. Funkcija $f : A \to R$ je neprekidna u tački $x_0 \in A$ ako i samo ako je neprekidna u tački $x_0 \in A$ i sa desne i sa lijeve strane tj. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Teorema 2. Neka su funkcije $f : A \to R$ i $g : A \to R$ neprekidne funkcije u tački $x_0 \in A$. Tada je:

- funkcija $c \cdot f(x)$ neprekidna funkcija u tački $x_0 \in A$,
- funkcija $f(x) + g(x)$ neprekidna funkcija u tački $x_0 \in A$,
- funkcija $f(x) - g(x)$ neprekidna funkcija u tački $x_0 \in A$,
- funkcija $f(x) \cdot g(x)$ neprekidna funkcija u tački $x_0 \in A$,
- funkcija $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ za $\forall x \in A$, neprekidna funkcija u tački $x_0 \in A$,
- funkcija $g(f(x))$ neprekidna funkcija u tački $x_0 \in A$.

Definicija 4. Tačku $x_0 \in A$ nazivamo **tačkom prekida** funkcije $f : A \to R$ ako u tački x_0 funkcija f nije neprekidna. Tačke prekida klasifikujemo na sljedeći način:

- ako postoje granične vrijednosti $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, a $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, tada je x_0 **tačka prekida prve vrste**,

- ako ne postoji bar jedna od graničnih vrijednosti $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0-} f(x)$, tada je tačka x_0 **tačka prekida druge vrste**,
- ako postoji granična vrijednost $\lim_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, tada je tačka x_0 **tačka otklonjivog prekida**.

Primjer 2. Ispitati neprekidnost funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$.

Za $x < 0$ $f(x) = 1$- je neprekidna funkcija, za $x < 0$ $f(x) = x^2 + x$- je neprekidna funkcija. Ispitajmo neprekidnost funkcije f u tački $x = 0$. Iz $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 1 = 1 = f(0)$ slijedi da je posmatrana funkcija f neprekidna sa lijeve strane u tački $x = 0$. Iz $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x^2 + x) = 0 \neq 1 = f(0)$ slijedi da posmatrana funkcija f nije neprekidna sa desne strane u tački $x = 0$. Pozivajući se na teoremu 1 zaključujemo da posmatrana funkcija f nije neprekidna u tački $x = 0$. Iz definicije 4 zaključujemo da je tačka $x = 0$ tačka prekida prve vrste.

Primjer 3. Odrediti vrijednost parametra a tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \le 1 \\ x^2 - 3x + 4, & x > 1 \end{cases}$ bude neprekidna na skupu R.

Za $x < 1$ $f(x) = ax + 1$ - je neprekidna funkcija na skupu R za $\forall a \in R$.
Za $x > 1$ $f(x) = x^2 - 3x + 4$ - je neprekidna funkcija na skupu R.
Da bi funkcija f bila neprekidna u tački $x = 1$ treba da važi jednakost $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (ax + 1) = a + 1 \\ &\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x^2 - 3x + 4) = 2 \\ &f(1) = a \cdot 1 + 1 = a + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a + 1 = 2 = a + 1 \Rightarrow a = 1.$$

Dakle, za $a = 1$ posmatrana funkcija je neprekidna na skupu R.

Primjer 4. Odrediti vrijednost parametara a i b tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \le 0 \\ ax + b, & 0 < x \le 3 \\ x^2 - 2x, & x > 3 \end{cases}$ bude neprekidna na skupu R.

Za $x < 0$ $f(x) = -x^2 + 1$ - je neprekidna funkcija na skupu R.
Za $0 < x < 3$ $f(x) = ax + b$ - je neprekidna funkcija na skupu R za $\forall a, b \in R$.
Za $x > 3$ $f(x) = x^2 - 2x$ - je neprekidna funkcija na skupu R.
Da bi funkcija f bila neprekidna u tački $x = 0$ treba da važi jednakost $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0)$

.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(-x^2+1)=1\\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(ax+b)=b\\ f(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow b=1.$$

Da bi funkcija f bila neprekidna u tački $x=3$ treba da važi jednakost $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=f(3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}(ax+b)=3a+b\\ \lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}(x^2-2x)=3\\ f(3)=3a+b\end{array}\right\}\Rightarrow 3a+b=3.$$

Rješavajući sistem $\begin{cases} b=1\\ 3a+b=3\end{cases}$ dobijamo $b=1,\quad a=\frac{2}{3}$.

Dakle, za $b=1,\quad a=\frac{2}{3}$ posmatrana funkcija f je neprekidna na skupu R.

Teorema 3. (Košijeva teorema o nuli neprekidne funkcije) Neka je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna na $[a,b]$ i neka je $f(a)\cdot f(b)<0$. Tada postoji tačka $c\in(a,b)$ takva da je $f(c)=0$.

Teorema 4. (Košijeva teorema o međuvrijednostima neprekidne funkcije) Neka je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna na $[a,b]$. Tada za svaki broj M između $f(a)$ i $f(b)$ postoji tačka $c\in[a,b]$ takva da je $f(c)=M$.

Teorema 5. (Vajerštrasova teorema o ograničenosti neprekidne funkcije) Neka je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna na $[a,b]$, tada je f ograničena na $[a,b]$.

Teorema 6.(Vajerštrasova teorema o maksimumu i minimumu neprekidne funkcije) Ako je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna na $[a,b]$, tada postoje tačke $x_0, x_1\in[a,b]$ takve da je $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $f(x_1)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (tj. $f(x_1)\le f(x)\le f(x_0)\quad \forall x\in[a,b]$)

Primjer 5. Jednačina $x^3-4x+3=0$ ima rješenje na intervalu $(-3,2)$. Dokazati.

Posmatrajmo funkciju $f(x)=x^3-4x+3$ na segmentu $[-3,2]$. Ova funkcija je neprekidna na $[-3,2]$ i $f(-3)=-12<0 \quad\wedge\quad f(2)=3>0$, tj. $f(-3)\cdot f(2)<0$, pa saglasno teoremi 3 postoji nula posmatrane funkcije na $(-3,2)$ tj. postoji rješenje posmatrane jednačine na $(-3,2)$.

Primjer 6. Jednačina $\sin x-x+1=0$ ima rješenje u intervalu $(0,\pi)$. Dokazati.

Posmatrajmo funkciju $f(x)=\sin x-x+1$ na segmentu $[0,\pi]$. Ova funkcija je neprekidna na $[0,\pi]$ i $f(0)=1>0 \quad\wedge\quad f(\pi)=-\pi+1<0$, tj. $f(0)\cdot f(\pi)<0$, pa saglasno teoremi 3 postoji nula posmatrane funkcije na $[0,\pi]$ tj. postoji rješenje posmatrane jednačine na $[0,\pi]$.

Primjer 7. Sve nule polinoma x^3-3x+1 pripadaju intervalu $(-2,2)$. Dokazati.

Posmatrajmo funkciju $f(x)=x^3-3x+1$ na segmantu $[-2,2]$. Kako je $f(-2)\cdot f(0)<0$, to saglasno teoremi 3 postoji $c_1\in(-2,0)$: $f(c_1)=0$. Kako je $f(0)\cdot f(1)<0$, saglasno teoremi 3 postoji $c_2 \in (0,1):\ \ f(c_2)=0$. Kako je $f(1)\cdot f(2)<0$, saglasno teoremi 3 postoji $c_3 \in (1,2):\ \ f(c_3)=0$. Dakle, $c_1, c_2, c_3 \in (-2,2):\ \ f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0$.

Primjer 8. Dokazati da svaki polinom trećeg stepena ima bar jednu realnu nulu.
Posmatrajmo polinom $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$. Ne umanjujući opštost neka je $a_3>0$. Kako je $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$ to postoji realan broj b takav da je $b>0 \wedge P(b)>0$. Slično, iz $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$ slijedi da postoji realan broj c takav da je $c<0 \wedge P(c)<0$. Kako je polinom P neprekidna funkcija na segmentu $[c,b]$ i $P(c)\cdot P(b)<0$, saglasno teoremi 3 postoji broj $d\in(c,b): P(d)=0$.

ZADACI ZA VJEŽBU

1. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$. **Rješenje:** $-\dfrac{3}{2}$.

2. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$, ako je $|a|<1$.

Rješenje: $\dfrac{3}{4(1-a)}$.

3. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}$. **Rješenje:** $\dfrac{1}{5}$.

4. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$. **Rješenje:** $\dfrac{1}{6}$.

5. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)}{n^3}$. **Rješenje:** $\dfrac{1}{3}$.

6. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+n)}{3n^3-1}$.

Rješenje: $\dfrac{1}{18}$.

7. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3+3\cdot 5+\ldots+(2n-1)\cdot(2n+1)}{1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n\cdot(3n+1)}$. **Rješenje:** $\dfrac{4}{3}$.

8. Izračunati graničnu vrijednost niza (x_n) ako je $x_n=\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}+\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$. **Rješenje:** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{3}+e^2$.

9. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+3}{2n^2-2n+1}\right)^n$. **Rješenje:** $\sqrt{e^3}$.

10. Ispitati konvergenciju niza $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\ln 1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\ln 2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\ln n}}$. **Rješenje:** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

11. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}$. **Rješenje:** 1.

12. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$. **Rješenje:** $a-b$.

13. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$. **Rješenje:** $\sqrt[3]{abc}$.

14. Izračunati $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$. **Rješenje:** 2.

15. Izračunati $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^x-9}{\sqrt[3]{4x}-2}$. **Rješenje:** $27\cdot\ln 3$.

16. Izračunati $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sqrt[3]{4x^2}-4}$. **Rješenje:** $24\cdot\ln 2$.

17. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\sin\left(\sqrt{x+4}-2\right)}{x}$. **Rješenje:** $\dfrac{3}{4}$.

18. Izračunati $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{7x+6}-3}{\sqrt{11x-8}-5}$. **Rješenje:** $\dfrac{70}{297}$.

19. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2}$. **Rješenje:** $\dfrac{3}{2}$.

20. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)+e^{\sin^2 x}-1}{x^2}$. **Rješenje:** $\dfrac{1}{2}$.

21. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1-\sin x}{\ln(1+2x)}$. **Rješenje:** $-\dfrac{1}{3}$.

22. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos xe^{x}-\cos xe^{-x}}{x^3}$. **Rješenje:** -2.

23. Odrediti vrijednost parametra a tako da funkcija $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos xe^{ax}-\cos xe^{-ax}}{x^3}, & x\neq 0\\ -2, & x=0\end{cases}$ bude neprekidna na skupu R. **Rješenje:** $a=1$.

24. Ispitati neprekidnost funkcije $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{e^x}, & x>0\end{cases}$. **Rješenje:** $f\notin C(0)$.

25. Naći pozitivan parametar a i $f(0)$ tako da funkcija $f(x)=\begin{cases}\left(a^x+2^x-3^x\right)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{ax}, & x>0\end{cases}$ bude neprekidna u tački $x=0$. **Rješenje:** $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

26. Odrediti parametre a i b tako da funkcija $f(x)=\begin{cases} 2\sin x, & x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x+b, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, & x\ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ bude neprekidna na skupu R. **Rješenje:** $a=1, \quad b=-1$.

27. Odrediti parametar a tako da funkcija $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}, & x\ne 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ bude neprekidna na skupu R. **Rješenje:** $a=1$.